Підготували науменко Ольга Борисівна, вчитель математики, малій Ірина, учениця 10-А класу.

ВСТУП Останні десятиріччя можна з упевненістю назвати революційними, періодом бурхливого розвитку новітніх комп'ютерних технологій, через що елементарні теорії математики, начебто, відійшли на другий план, стали не такими «популярними» серед науковців. Разом із тим, сьогодні природничі науки потребують високого рівня застосування математики. Саме тому у роботі автор хоче звернути увагу на актуальність використання нині класичних підходів до подільності в математиці, її доступність та практичну значимість у застосуванні. Певно, зараз люди частіше користуються калькуляторами, аніж рахують усно. Але багато століть тому наші попередники навчилися підраховувати остачу, частку та виконувати багато інших обчислень без використання електронних технологій. Це забезпечувало проведення обчислювальних робіт у різних галузях науки: астрономії, фізиці, географії тощо. Фактично, саме тому вчені створили саму науку математику, не маючи ні комп'ютерів, ні інших обчислювальних пристроїв. Вони хотіли самі осягнути та зрозуміти закони природи і суспільства за допомогою математики та передати ці знання своїм наступникам. Дотепер ми користуємося ними. Як казав Ейнштейн, «хоч би як добре працювала машина, вона зможе розв'язувати всі задачі, що ставляться перед нею, але сама жодної задачі не придумає» - хоч зараз є різноманітні пристрої для полегшення роботи людини з цифрами, «нову арифметику» ще ніхто не придумав.Оскільки сума, різниця та добуток цілих чисел завжди цілі числа, автор у своїй роботі працював із частками та остачами, тобто з подільністю чисел та многочленів. У роботі досліджуються властивості подільності, ділення простих та складених чисел. Після цього досліджується застосування теореми Безу до ділення многочленів. Також розглянуто окремі ознаки подільності чисел: на 7, 11, 13, 17, 19, 23, 99, 101 і 9999. Використовуючи їх, розв'язати задачі на подільність буде не складно. Приділяється увага і діленню з остачею, його властивостям та рівності за остачею. Окрім цього, опрацьовано алгоритм розкладання числа на прості множники і решето Ератосфена. Також у роботі визначено алгоритм знаходження найбільшого спільного дільника і найменшого спільного кратного. Питання подільності натуральних чисел розглядалися уже в античні часи. Евкліду належить один із найвідоміших результатів математики, твердження, що не існує найбільшого простого числа, тобто множина простих чисел — нескінченна. Він також навів найперший в історії алгоритм знаходження найбільшого спільного дільника двох натуральних чисел. Але набагато раніше за Евкліда, Піфагор і піфагорійці розробили теорію досконалих чисел, які відігравали важливу роль у їх філософській системі. Великий французький учений Марен Мерсенн (1588-1648) цікавився простими та складеними числами. В одному з листів до Ейлера, Гольдбах у 1742 р. висловив твердження: кожне натуральне число можна виразити сумою трьох простих чисел. Ейлер відповів, що для розв'язання цієї проблеми досить довести, що будь-яке парне число можна подати у вигляді суми двох простих чисел. Так понад 250 р. тому виникла проблема Гольдбаха-Ейлера, яку частково розв'язав академік Виноградов, але повністю вона і досі не розв'язана. Тому, як казав Сократ, Те, що я встиг пізнати, - чудово. Сподіваюся, таке ж чудове те,Що мені ще доведеться пізнати –сучасні вчені мають можливість працювати над цією проблемою. Професори Є. І. Золотарьов і О. М. Коркін зробили важливе відкриття в галузі теорії так званих квадратичних форм, що розглядаються в теорії чисел. Золотарьов займався також розробкою теорії подільності многочленів як цілих алгебраїчних чисел. У роботах Куммера, Кронекера і Дедекінда з теорії подільності алгебраїчних цілих чисел з'явились фундаментальні для сучасної математики поняття теорії кілець. Великий внесок у вивчення ознак подільності чисел вніс Б. Паскаль. Говорячи про важливу роль теорії подільності чисел у математичному вихованні, А.І. Маркушевич зауважив, що ця теорія є одним із небагатьох розділів математичної науки в (даному випадку теорія чисел), з яким можна без будь-яких скорочень і пропусків, зі всіма необхідними кінцевими визначеннями і доведеннями ознайомити учнів. Робота ґрунтується на дослідженнях вчених про подільність чисел та многочленів. Працюючи з теоремами автор наводить приклади, які краще допомагають зрозуміти їх.

РОЗДІЛ 1ПОДІЛЬНІСТЬ ЧИСЕЛУ визначенні подільності чисел нічого не говориться про те, скільки різних значень може мати частка від ділення. Для з'ясування цього, слід розглянути два випадки. Число a ділиться на число b, якщо є таке число c, що $a = bc$. Цей факт називається подільністю числа a на число b і позначається як a ⋮ b.Нехай $a = bc$, і разом з цим $a = bc'$. З цих нерівностей ми отримуємо $bc = bc'$, або $b(c - c') = 0$. Якщо при цьому $b \neq 0$, то $c - c' = 0$, тобто $c = c'$. Якщо ж $b = 0$, то і $a = 0$, а рівність виконується при будь-якому c.Таким чином, на нуль ділиться лише нуль, а частка від такого ділення невизначена. Саме це мається на увазі, коли говорять про неможливість ділення на нуль. Якщо ж дільник не нуль, то частка має одне значення.1.1 Властивості подільності:Теорема 1. a ⋮ a. Теорема 2. Якщо a ⋮ b і b ⋮ c, то a ⋮ c.Теорема 3. Якщо a ⋮ b і b ⋮ a, то або $a = b$, або $a = - b$.Теорема 4. Якщо a ⋮ b і $| b |$ ⋮ $| a |$, то $a = 0$.Наслідок. Якщо a ⋮ b і $a \neq 0$, то $| a | \geq | b |$.Теорема 5. Для того щоб a ⋮ b, необхідно і достатньо, щоб $| a |$ ⋮ $| b |$.Теорема 6. Якщо a_1 ⋮ b, a_2 ⋮ b, …, a_n ⋮ b, то $(a_1 + a_2 + … + a_n)$ ⋮

b.Наслідок. Якщо сума двох чисел і однин з доданків ділиться на деяке число b, то і інший доданок ділиться на b.Наприклад:Щоб довести, що вираз 36n + 9 + 54 ділиться на 27, потрібно: За теоремою 6 випливає: якщо і 54, і 36n +9 діляться на 27, то і весь вираз ділиться на 27; 54 : 27 = 2 - ділиться на 27; 36n +9 = 33(2n +3) = 272n +3 = 272n 273 - обидва множники діляться на 27. Вираз 36n + 9 + 54 ділиться на 27.Очевидно, що сума, різниця і добуток парних чисел завжди парні. Але, ділення парного числа на парне не завжди виконується, а якщо це можливо, то частка не завжди парне число. Тому можна ввести поняття парної подільності:Парне число a парно ділиться на парне число b, якщо є таке парне число c, що a = bc.Отже, для парної подільності деякі теореми невірні. Наприклад, теорема 1 – не існує такого парного числа c, для якого a = ac.1.2 Ділення простих та складених чиселЧисло p, яке не дорівнює одиниці, називається простим, якщо воно ділиться лише на себе та на одиницю. Число, яке відмінне від одиниці і не є простим, називається складеним.Теорема 1. Якщо a і p – натуральні числа, то, або a p, або числа a і p взаємно прості (найбільший спільний дільник – одиниця).Теорема 2. Якщо M – спільне кратне a і b, a m – їх найменше спільне кратне, то M m.Теорема 3. Найменше спільне кратне двох простих чисел дорівнює їх добутку.Наслідок. Для того, аби число a ділилося на взаємно прості числа b і c, необхідно і достатньо, щоб воно ділилося на їх добуток.Теорема 4. Якщо ab c, причому числа b і c взаємно прості, то a c.Теорема 5. Якщо добуток кількох співмножників ділиться на просте число p, то хоча б один із співмножників ділиться на p.Теорема 6. Основна теорема арифметики: Будь-яке ціле додатне число, крім одиниці, може бути представлене у вигляді добутку простих співмножників у єдиному вигляді.Теорема 7. Для того, щоб числа a і b були взаємно простими, необхідно і достатньо, аби жоден з простих співмножників, які входять в канонічний розклад числа a, не входив в канонічний розклад числа b.Приклад до теореми 2: Візьмемо числа 15 і 21. А за спільне кратне – 1050. Найменше спільне кратне 15 і 21 – 105. 1050 : 105 = 10. Отже, спільне кратне двох чисел ділиться без остачі на їх найменше спільне кратне.Приклад до теореми 4: Візьмемо числа 12, 9 та 4, на яке ділиться добуток 12 та 9, та яке є взаємно простим з числом 9. 108 : 4 = 27. 12 : 4 = 3. Отже, якщо добуток чисел ділиться на число, яке є взаємно простим із одним з множників, то другий множник ділиться на це число.1. 4 Ознаки подільностіНа 11Число ділиться на 11, якщо сума його цифр, які знаходяться на непарних місцях, або рівна сумі цифр, які знаходяться на парних місцях, або відрізняється від неї на число, яке ділиться на 11.Наприклад: Число 103785 ділиться на 11, бо сума цифр,що займають непарні місця, 1+3+8=12, дорівнює сумі цифр, що займають парні місця, 0+7+5=12. Число 96954 ділиться на 11, бо сума цифр, що стоять на непарних місцях, 9+9+4=22 на 11 більша за суму цифр на парних місцях, 6+5=11(22-11=11).На 7Алгоритм: 1. Закреслити останню цифру, із отриманого числа відняти число, що дорівнює подвоєній закресленій цифрі.2. Повторювати дії першого пункту, поки не отримаємо двозначного числа. Якщо це число ділиться на 7, то і початкове число ділиться на 7.Наприклад:Чи ділиться число 59892 на 7?

Число 42 ділиться на 7, отже, 59892 без остачі ділиться на 7.На 13Алгоритм: 1. Закреслити останню цифру, до отриманого числа додати число, що у 4 рази більше закресленої цифри.2. Повторювати дії першого пункту, поки не отримаємо двозначного числа. Якщо це число ділиться на 13, то і початкове число ділиться на 13.Наприклад: Чи ділиться число 32084 на 13?

Число 26 ділиться на 13, отже, 32084 ділиться без остачі на 13.На 17Алгоритм: 1. Закреслити останню цифру, з отриманого числа відняти число, що у 5 разів більше закресленої цифри. 2. Повторювати дії першого пункту, поки не отримаємо двозначного числа. Якщо це число ділиться на 17, то і початкове число ділиться на 17. Наприклад: Чи ділиться число 6285597 на 17?

0 ділиться на 17, отже, 625597 ділиться без остачі на 17.На 19Алгоритм: 1. Закреслити останню цифру, до отриманого числа додати число, рівне подвоєній закресленій цифрі. 2. Повторювати дії першого пункту, поки не отримаємо двозначного числа. Якщо це число ділиться на 19, то і початкове число ділиться на 19. Наприклад: Чи ділиться число 3677355 на 19? 38 ділиться на 19, отже, 3677355 теж ділиться на 19. На 23Алгоритм: 1. Закреслити останню цифру, до отриманого числа додати число, що у 7 разів більше закресленої цифри. 2. Повторювати додавання першого пункту, поки не отримаємо двозначного числа. Якщо це число ділиться на 23, то і початкове ділиться на 23. Наприклад:Чи ділиться число 321425 на 23? 23 ділиться на 23, отже, 321425 теж ділиться на 23.На 99Алгоритм: Розбити число на дві групи по дві цифри справа наліво, у першій групі зліва може бути одна цифра, і знайти суму цих груп, вважаючи їх двозначними числами. Якщо це число ділиться на 99, то і початкове число ділиться на 99. Наприклад: Число 343035: 34 + 30 + 35 = 99. Число ділиться на 99, отже і початкове ділиться на 99.На 101Алгоритм: Розбити число на групи по 2 цифри справа наліво (у першій групі зліва може бути одна цифра) і знайти суму цих груп зі змінними знаками, вважаючи їх двозначними числами. Якщо це число ділиться на 101, то і початкове ділиться на 101. Наприклад:Число 149985: 14 - 99 +85 = 0. Число ділиться на 101, отже і початкове ділиться на 101.На 9999Алгоритм:Розбити число на групи по 4 цифри справа наліво (у першій групі зліва може бути від 1 до n цифр) і знайти суму цих груп. Якщо це число ділиться на 9999, то і початкове число ділиться на 9999. Наприклад:Число 379962: 37 + 9962 = 9999. Число ділиться на 9999, отже і початкове число ділиться на 9999.

РОЗДІЛ 22.1 Ділення многочлена на многочлен кутомДілення многочленів виконується аналогічно до ділення багатоцифрових чисел. Ділення можливе, коли степінь многочлена-діленого вищий або дорівнює степеню многочлена-дільника. Алгоритм: Поділити старший член діленого на старший член дільника. Частку від ділення помножити на дільник. Добуток відняти від діленого. Різницю (першу остачу) знову поділити на дільник і знайти наступну остачу. Повторювати дії поки в остачі не буде 0, або степінь остачі буде нижчим від степеня дільника.Наприклад:Знайти всі цілі числа n, для яких число n2 + 1 ділиться на n +1. Для цього потрібно: Поділити n2 + 1 на n + 1
n2 + 1 n + 1 n2 + n n – 1 - n + 1 - n – 1 2
Розкласти: n2 + 1 = (n + 1)(n – 1) + 2 | : (n + 1) (n^2 + 1)/(n + 1) = n – 1 + 2/(n + 1) Щоб числа ділилися націло, 2/(n + 1) повинно бути цілим. Отже, n = { -2; 1; -3; 0}.

2.3 Теорема БезуТеорема. Остача від ділення многочлена P(x) на двочлен x – a дорівнює значенню цього многочлена, коли x = a, тобто P(a).Наприклад:(x3 + 5x2 – 6x – 6) : (x – 2) – остача ділення многочленів дорівнює 10. У дільнику від змінної віднімається число 2. Якщо це число підставити в ділене замість x, то дістанемо 10, тобто остачу: 23 + 5 □ 22 – 6 □ 2 – 6 = 10.Наслідки: Якщо a – корінь многочлена P(x), то многочлен ділиться на x – a без остачі. Якщо многочлен ділиться на x – a без остачі, то a – корінь многочлена. xn - an ділиться без остачі на x – a. x2n – a2n ділиться без остачі на x + a. x2n – 1 – an – 1 не ділиться на x + a. x2n – 1 + an – 1 ділиться без остачі на x + a. x2n + x2n не ділиться на x + a.Наприклад: 1. Щоб довести, що вираз 42n – 32n – 7 ділиться на 84, потрібно: Розкласти 84 як 12□7. Перевіряємо подільність виразу на 7: 42n – 32n ділиться на 7 за наслідком 4, -7 також ділиться на 7. Перевіряємо подільність виразу на 12: 42n – 32n – 7 = 42n – 32n – 3 – 4 = = 16n – 9n – 4 – 3 = (16n – 4) – (9n + 3) , 16n – 4 ділиться на 12 за наслідком 3, а 9n + 3 – за наслідком 4. Отже, вираз 42n – 32n – 7 ділиться на 84.2. Визначити остачу від ділення деякого многочлена на (x - 1)(x – 2), якщо цей многочлен приділенні на x-1 діє остачу 3, а при діленні на x – 2 дає остачу 4. Для цього потрібно: Визначити, що остача має вигляд ax + b. Представити многочлен у вигляді Q(x) □ (x – 1) + 3; P(x) □ (x – 2) + 4. За теоремою Безу у обидві вирази замість x підставляємо число, протилежне a та, відповідно, b (у першому – це 1, у другому – 2). Знайти остачу: у першому – 3, у другому – 4. Знайти значення a і b:{□(a+b=3@2a+b=4)□ =□ {□(a=1@b=2)□ Підставити значення a і b у вираз. Остача дорівнює: x + 2.

РОЗДІЛ 3ДІЛЕННЯ З ОСТАЧЕЮРозділити число a на число b (b0) з остачею – означає представити число a у вигляді: $a = bq + r$, де $0 \le r \le b$. Число q називається неповною часткою, а число r – остачею від ділення a на b. Очевидно, що $r = 0$, тоді і тільки тоді, коли a b. У цьому випадку q дорівнює частці від ділення a на b.Ділення з остачею завжди виконується, а неповна частка і остача цілком визначаються діленим і дільником, тобто єдині.3.1 Властивості ділення з остачеюНехай спочатку $a \ge 0$. Виписуємо одне за одним числа:a, a – b , a - 2b , …доти, доки не з’явиться від’ємне число. Нехай останнім із невід’ємних членів послідовності, тобто найменшим з них, буде число a – bq. Позначимо його через r:a = bq + r.Нехай a 0. Виписуємо числа, аналогічно першому випадку:a, a + b , a + 2b , …доти, доки не з’явиться перше невід’ємне число r. Нехайr = a + bq'.Тоді, позначивши -q' через q, ми отримаємо a = bq + r.Доведемо однозначність ділення, тобто що з a = bq + ra = bq1 + r1випливаєq = q1 і r = r1.Якщо bq + r = bq1 + r1 , то r – r1 = b(q – q1),тобто r – r1 ділиться на b. Але | r – r1 | b, а за теоремою 4 це можливо лише при r – r1 = 0,тобто при r = r1. Але тоді b(q1 - q) = 0,оскільки число b не дорівнює нулюq1 – q = 0,тобто q1 = q. Отже, однозначність доведена, як і наступна теорема.Теорема 1. Для довільних чисел a і b (b 0) існують і єдині числа r і q, що   a = bq + r, причому 0≤rb.Наприклад: Щоб знайти найменше натуральне число n, яке при діленні на 4 дає в остачі 2, при діленні на 5 – в остачі 3, а при діленні на 6 – 4, потрібно: n = 4q_1 + 2, n + 2 = 4q_1 + 4, отже, n + 2 4 n = 5q_1 + 3, n + 2 = 5q_1 + 5, отже, n + 2 5 n = 6q_1 + 4, n + 2 = 6q_1 + 4, отже, n + 2 6 Отже, n + 2 ділиться на НСК(4;5;6) = 60 Звідси n = 60 – 2 = 58. Дізнатися, на який день припадає мій День Народження – 23 лютого, у 2016 році. У 2012 цей день був у четвер. Чотири роки, які розділяють ці дати, складаються з 4365 + 1 = 1461 днів. Тобто 208 тижнів і 5 днів. Рівно через 208 тижнів буде четвер, і ще через 5 днів – вівторок.3.2 Рівні за остачею числаЧисла a і b – рівні за остачею при діленні на m, якщо остачі від ділення a і b на m рівні.Властивості чисел, рівних за остачею:Теорема 1. Для того, щоб числа a і b були рівні за остачею при діленні на m, необхідно і достатньо, аби (a – b) m.Наслідок. Якщо числа a   і b рівні за остачею при ділення на m, і m d, то a і b рівні за остачею при ділені на d.Теорема 2. Якщо при діленні на m числа a1, a2, …, an відповідно рівні за остачею числам b1, b2, …, bn, то рівні за остачею будуть суми a1 + a2 + … + an і b1 + b2 + … + bn, а також добутки a1 a2 … an і b1 b2 … bn.Наслідок. Якщо при діленні на m числа a і b рівні за остачею, то такими є і степені an і bn при будь-якому натуральному n.Наприклад:1. Знайти остачу від ділення A = (116 + 1717)21 на 8. Для цього потрібно: 116 при діленні на 8 рівне за остачею з 4, а 17 – з 1. A рівне за остачею з 521 = (52)10 5. 52 = 25 при діленні на 8 рівне за остачею з одиницею. Отже, вираз A = (116 + 1717)21 при діленні на 8 дає в остачі 5.2. Знайти остачу від ділення A = 14256 на 17. Для цього потрібно: 14 при діленні на 17 рівне з -3. A рівне за остачею з (-3)256 = 3256 = (33)85 3. (33)85 3 = 1085 3 = (102)42 30. 102 рівне за остачею з -2, а -2 з -1. A рівне за остачею з (-2)42 30 = 242 30 = (24)10 4 30 = (-1)10 4 30 = = 120. Останнє число при діленні на 17 дає в остачі 1.   Отже вираз A = 14256 при діленні на 17 дає в остачі 1.РОЗДІЛ 4ВИКОРИСТАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПОДІЛЬНОСТІ4.1 Розкладання числа на прості множникиУ теорії чисел основна теорема арифметики стверджує, що будь-яке натуральне число, більше одиниці, може бути представлене у вигляді добутку простих чисел і таке представлення є єдиним з точністю до порядку множників.Таким чином, теоремою стверджується, що не існує таких чисел, які можна було б розкласти на прості множники різними способами.У деяких випадках твердження основної теореми арифметики застосовуються для всіх цілих чисел, крім нуля. При цьому прийнято вважати, що одиниця є добутком нульової кількості простих чисел (порожній добуток), а унікальність розкладу доводиться з точністю до порядку множників та їхніх знаків.Розкладом на прості множники називають запис числа у вигляді добутку простих множників.Щоб розкласти число на прості множники, треба знайти його прості дільники. Зручно розкладати число на множники таким чином: Записуємо число і проводимо праворуч вертикальну риску; Найменший простий дільник цього числа записуємо праворуч від риски; Зліва від риски під заданим числом записуємо частку від ділення числа на простий дільник; Праворуч від риски записуємо найменший простий дільник одержаного числа.Продовжуємо знаходити прості дільники, доки частка не дорівнюватиме одиниці.Праворуч від риски розташовані найменші прості дільники заданого числа.Розкладом на прості множники буде добуток цих найменших дільників.

Наприклад: Розкладаємо число 21002100 21050 2525 2175 235 57 7отже 2100 = 2 2 2 2 5 7.4.2 Решето ЕратосфенаЯкщо потрібно знайти всі прості числа менші за певне число n, потрібно: Виписати всі числа від 2 до n. Нехай змінна p буде рівна 2 – першому простому числу. Викреслити всі числа від 2p до n, які діляться на p. Знайти перше не викреслене число, більше ніж p, та присвоїти до значення змінної p це число. Повторювати пункти 3 і 4, поки p не стане більше, ніж n.Всі не викреслені числа – прості. Цей алгоритм достатньо виконувати, доки виконується умова p2 n.Наприклад:Щоб знайти всі прості числа від 2 до 20, потрібно: Виписати їх: 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20. Викреслити числа, кратні 2p, де p = 2: 2 3 5 7 9 11 13 15 17 19. Викреслити числа, кратні p, де p = 3: 2 5 7 11 13 17 19. Отже, простими є числа 2, 5, 7, 11, 13, 17, 19.4.3 Найбільший спільний дільникНайбільший спільний дільник - найбільше натуральне число, на яке дані числа діляться без остачі.Для знаходження НСД потрібно: Розкласти данні числа на прості множники. Виписати всі прості числа, які одночасно входять в кожне з отриманих розкладань. Кожне з виписаних простих чисел взяти з найменшим з показників степені, з якими воно входить в розкладання даних чисел. Записати добуток отриманих степенів.

Алгоритм Евкліда на знаходження НСД:

Якщо числа рівні, то взяти будь-яке з них в якості відповіді, в іншому випадку продовжити виконання алгоритму. Замінити більше число різницею більшого і меншого з чисел. Повернутися до виконання першого пункту.Якщо НСД (a і b) = 1, то числа a і b називають взаємно простими.Наприклад:Визначимо НСД(840, 396). Розклад на прості множники: ,Отже,НСД(840, 396) = 22 31 50 70 110 = 12.

4.4 Найменше спільне кратнеНайменше спільне кратне (НСК) двох цілих чисел a, b - це найменше натуральне число, яке ділиться на a і b. Позначається НСК.Для знаходження НСК потрібно: Розкласти дані числа на прості множники. Виписати всі прості числа, які входять у кожне з отриманих розкладань. Кожне з виписаних простих чисел взяти з найбільшим з показників степені, з якими воно входить у розкладання даних чисел. Записати добуток отриманих степенів.Взаємно простими називаються числа, які не мають ніяких спільних множників, крім ±1.Якщо числа a1, … , an – попарно взаємні прості числа, то НСК(a1, … , an) = = | a1, … , an | .Числа a і b взаємно прості, коли існують цілі x і y такі, що ax + by = 1.Наприклад:Визначимо НСК(840, 396). Розклад на прості множники: ,Отже,НСК(840, 396) = 23 32 51 71 111 = 27720

ВИСНОВКИРозглядаючи поняття подільності та її властивості, я використала їх при діленні простих та складених чисел, діленні многочленів та діленні з остачею. Після виконання певних прикладів на подільність я можу зробити такі висновки: Застосування теорем подільності полегшують виконання обчислень; Знаючи ознаки подільності на 7, 11, 13, 17, 19, 23, 99, 101, 9999, та застосовуючи їх, процес ділення стає набагато простішим та швидшим; Ділення многочлена на многочлен кутом швидко і якісно допомагає при діленні многочленів. А використовуючи теорему Безу, легко визначити остачу від ділення многочленів. Властивості подільності використовуються у розкладанні числа на прості множники, знаходженні найбільшого спільного дільника і найменшого спільного кратного. При роботі з простими числами використовується решето Ератосфена, а властивості ділення з остачею допомагають при діленні виразів зі степенями. Властивості подільності широко використовуються істориками (при знаходженні дат, зазначених різними календарями), економістами, науковцями та іншими фахівцями.

ЛІТЕРАТУРА Коваленко В. Г., Кривошеев В. Я., Лемберский Л. Я. Алгебра: эксперим. учеб. пособие для 8 кл. шк. с углубл. изучением математики и специализир. шк. физико-мат. профиля– К.: Рад. шк., 1990. – с. 17 - 24. Воробьев Н. Н. – М.: Наука, 1980. – с. 7 – 11, с. 27.ІНТЕРНЕТ-РЕСУРСИ http://osvita.ua/vnz/reports/biograf/24064/
http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%B4%D1%96%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%96%D1%81%D1%82%D1%8C
http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D0%BA%D0%B0_%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%96%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%96_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%BB